ITECH LYON

Concours d'entrée 1994

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE 4 HEURES

Problème I.

On désigne par $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On fixe $a \in \mathbf{R}$ et, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[x]$, on pose:

$$D(p)(x) = \frac{P(x) - P(a)}{x - a}$$

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[x]$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$, $\mathrm{Im}(D)$ et $\mathrm{Ker}(D) \cap \mathrm{Im}(D)$.

3. Construire une base $(Q_0, Q_1, ..., Q_n)$ de $\mathbf{R}_n[x]$ telle que:

(i) $D(Q_0)$ est le polynome nul.

(ii) $Q_0(a) = 1$.

(iii) $D(Q_i) = Q_{i-1}$, pour tout $i \in [1, ..., n]$.

(iv) $Q_i(a) = 0$, pour tout $i \in [1, ..., n]$.

Ecrire la matrice de D dans cette base.

4. On pose $D^{(1)} = D$ et pour $i \geq 2$, $D^{(i)} = D \circ D^{(i-1)}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(D^{(i)})$, $\mathrm{Im}(D^{(i)})$ et $\mathrm{Ker}(D^{(i)}) \cap \mathrm{Im}(D^{(i)})$. Calculer ensuite pour $i \geq 1$ et $0 \leq p \leq n$, $D^{(i)}(Q_p)$.

5. Soit $P = \alpha_0 Q_0 + ... + \alpha_n Q_n$, la décomposition de $P \in \mathbf{R}_n[x]$ dans la base $(Q_0, ..., Q_n)$.

Exprimer les coordonnées $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ de P à l'aide de P et des polynômes $D^{(i)}(P)$, pour $i \geq 1$.

Problème II. Dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, deux points M et N sont en mouvement. A l'instant $t = 0$, le point M possède une abcisse a strictement positive et une ordonnée b quelconque, tandis que le point N se trouve en O. A tout instant t, le vecteur vitesse $\vec{v}_1$ de M, de norme constante et non nulle v_1 a même direction et même sens que le vecteur $\vec{MN}$; le vecteur vitesse $\vec{v}_2$ de N, de norme constante et non-nulle v_2, est égal à $v_2\vec{j}$.

On notera x et y les coordonnées du point M, θ l'angle $(\vec{i}, \vec{NM})$ et γ le rapport v_2/v_1.

On s'intéresse à la courbe décrite par le point M à partir de l'instant $t = 0$ et tant que l'abcisse x de M demeure strictement positive.

1. Exprimer dx/dt et dy/dt en fonction de v_1 et θ. Exprimer dy/dt en fonction de dx/dt. En déduire dy/dx.

2. Quelles sont les coordonnés de N en fonction de t ? Exprimer y en fonction de x, v_2, t, θ.

3. Montrer que l'on a:

$$\frac{\gamma}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

En déduire l'expression :

$$x^\gamma = C\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad C = a^{\gamma-1}\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)$$

4. Exprimer $\sin\theta$, puis $\tan\theta$, en fonction de x, γ, C. Montrer que, pour $\gamma \neq 1$, la trajectoire de M est la courbe d'équation:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\frac{x^{1+\gamma}}{1+\gamma} - C\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) + K \quad \text{avec} \quad K = \frac{\gamma}{1-\gamma^2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\gamma b\right)$$

Determiner l'équation de la trajectoire pour $\gamma = 1$.

Problème III.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables (par notation $f^{(j)}$ est la dérivée n-ième de f, $f^{(0)} = f$, on écrira aussi $f^{(1)} = f'$) et vérifiant les deux propriétés suivantes:

(A) : il existe un nombre réel r vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \left[e^{-rt} f^{(j)}(t)\right] = 0, \ \forall j \in \mathbf{N}$,

(B) : l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est absolument convergente.

Si $f \in \mathcal{H}$, on note $\alpha(f)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels r satisfaisant la condition (A).

1. Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout nombre réel y tel que $y > \alpha(f)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ est absolument convergente.

2. Déterminer $\alpha(f)$ pour les fonctions $g_1(t) = \sin(t)$, $g_2(t) = \ln(t)$ et $g_3(t) = e^{-t^2}$.

Dans la suite, on associe à toute fonction f de $\mathcal{H}$ la fonction $F = \Lambda(f)$ définie sur $]\alpha(f), +\infty[$ par $F(y) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$. On admettra que l'application Λ est injective. On admettra également que la fonction $\Lambda(f)$ est de classe C^∞ sur $]\alpha(f), +\infty[$.

3. Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction définie par $F_n(y) = \int_{1/n}^{n} f(t)e^{-yt}dt$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée au moyen d'une intégrale. Montrer que la suite $(F_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $\Lambda(g)$ sur $[r, +\infty[$ pour tout $r > \alpha(f)$, g étant une fonction de $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

4. Etablir que pour tout $f \in \mathcal{H}$, la n-ième dérivée ($n \in \mathbf{N}$) de $\Lambda(f)$ est l'image par Λ d'une fonction de $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

5. Déterminer $\Lambda(f)$ lorsque (i) $f(t) = 1, \forall t \in]0, +\infty[$; (ii) $f(t) = t^n/n!$ avec $n \in \mathbf{N}$.

6. Soit $b \in \mathbf{R}$. Trouver f telle que $\alpha(f) = b$ et $\Lambda(f)(y) = 1/(y - b)$.